

GÉOMÉTRIE AFFINE

La structure vectorielle de l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ nous a permis de parler des droites et des plans de cet espace, mais seulement de celles et ceux qui passent par $0_{\mathbb{R}^3}$, et que nous avons qualifiés de *vectoriels* en référence au fait qu'ils sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Or la géométrie met à notre disposition d'autres droites et d'autres plans que celles et ceux passant par $0_{\mathbb{R}^3}$. Quelle théorie générale peut-on en faire ?

Jusqu'ici, par ailleurs, nous avons toujours considéré les éléments de nos espaces vectoriels comme des vecteurs — bien entendu. Or en géométrie la notion de point témoigne d'une intuition importante, bien distincte de la notion de vecteur. Nous considérerons dans ce chapitre les éléments des espaces vectoriels tantôt comme des points (majuscules $A, B, C \dots$), tantôt comme des vecteurs (minuscules $x, y, z, \dots$). Si A et B sont deux points, la différence $B - A$ sera notée $\overrightarrow{AB}$ et considérée toujours comme un vecteur. Mathématiquement, cette alternance de point de vue ne pose aucun problème ; c'est ce que nous avons pu constater en début d'année quand nous faisons de la géométrie dans le plan et dans l'espace. Nous avons pris l'habitude d'identifier points et vecteurs et nous leur appliquons les mêmes règles de calcul.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres $n, p, q \dots$ désignent des entiers naturels non nuls.

1 NOTIONS AFFINES

1.1 BARYCENTRES

Définition (Point pondéré et barycentre d'une famille finie de points pondérés) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On appelle *point pondéré* de E tout couple (A, λ) constitué d'un point A de E et d'un scalaire λ de $\mathbb{K}$.

- Soit $\left((A_k, \lambda_k)\right)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de points pondérés de E . On pose : $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ (*poinds total*).

1) Si $\Lambda = 0$, le vecteur $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k}$ ne dépend pas du choix du point M de E .

2) Si au contraire $\Lambda \neq 0$, il existe un unique point G de E tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = 0_E$. On l'appelle le *barycentre*

des points pondérés $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n)$ et en fait $G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k$. Pour tout point M de E , on a la relation

caractéristique : $\Lambda \overrightarrow{MG} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k}$.

✕✕✕ Attention ! Pas de barycentre si le poids total Λ de la famille des points pondérés $\left((A_k, \lambda_k)\right)_{1 \leq k \leq n}$ est nul !

Démonstration

1) On suppose que $\Lambda = 0$. Pour tout $M \in E$: $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k} = \sum_{k=1}^n \lambda_k (A_k - M) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k - \Lambda M = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k$.

Cette quantité ne dépend pas de M .

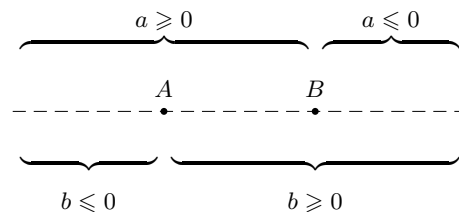
2) On suppose que $\Lambda \neq 0$. Pour tout $G \in E$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = 0_E \iff \sum_{k=1}^n \lambda_k (A_k - G) = 0_E \iff \Lambda G = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k \stackrel{\Lambda \neq 0}{\iff} G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k.$$

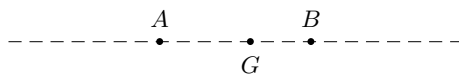
Ceci prouve l'existence et l'unicité du barycentre cherché. ■

⚡ ⚡ ⚡ Explication Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'est pas inutile de savoir situer intuitivement le barycentre de deux points. Soient donc deux points A et B et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b \neq 0$. Quitte à diviser a et b par $a + b$, ce qui ne change pas le barycentre G de (A, a) et (B, b) , on peut supposer que $a + b = 1$. Comme on vient de le voir, $G = aA + bB$. Les figures qui suivent illustrent des phénomènes que vous avez déjà rencontrés et devez maîtriser correctement.

- Où le point G est-il situé ? Entre A et B ? À gauche de A ? À droite de B ?



- Où le point G est-il situé ? Plus proche de A ou plus proche de B ?



Cas où $a \approx b$
(A et B attirent G à eux
à peu près autant l'un que l'autre)



Cas où $a \ll b$
(l'attraction de B est la plus forte)

Théorème (Associativité du barycentre) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, I un ensemble fini non vide, $((A_i, \lambda_i))_{i \in I}$ une famille de points pondérés de E de poids total non nul et G le barycentre associé.

Soit en outre $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ une partition de I . On note, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\Lambda_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i$, et on suppose $\Lambda_k \neq 0$ de façon à

pouvoir parler du barycentre G_k des points pondérés (A_i, λ_i) , $i \in I_k$.

Alors G est le barycentre des points pondérés (G_k, Λ_k) , $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

🐞🐞🐞 **Explication** On parle d'associativité du barycentre car ce résultat affirme qu'on peut associer par paquets $((A_i, \lambda_i))_{i \in I_k}$ certains points pondérés (A_i, λ_i) et les remplacer par leur barycentre G_k affecté du coefficient Λ_k sans modifier la nature du barycentre global G .

Démonstration Notons Λ le poids total de la famille $((A_i, \lambda_i))_{i \in I}$. On a : $\Lambda = \sum_{k=1}^n \Lambda_k$.

$$G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i A_i = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \sum_{i \in I_k} \lambda_i A_i = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \Lambda_k G_k. \quad \text{C'est exactement le résultat voulu.} \quad \blacksquare$$

1.2 TRANSLATIONS

Définition (Translation) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un vecteur de E .

On appelle *translation de vecteur u* l'application $\begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + u \end{cases}$ (si l'on voit les éléments de E comme des vecteurs) ou

$\begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + u \end{cases}$ (si l'on voit les éléments de E comme des points).

On notera dans ce qui suit t_u cette application, mais ce n'est pas là une notation universelle.

⚡⚡⚡ **Attention !** Si $u \neq 0_E$, l'application t_u n'est pas linéaire car alors $t_u(0_E) = u \neq 0_E$.

1.3 SOUS-ESPACES AFFINES

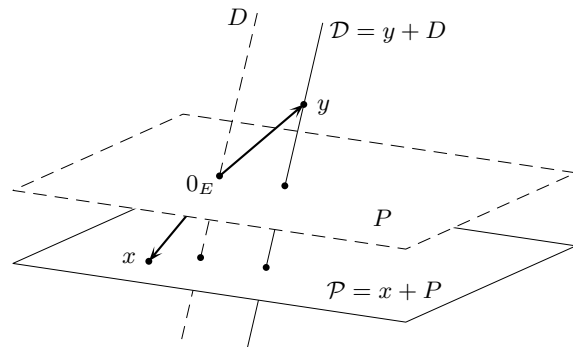
Définition (Sous-espace affine d'un espace vectoriel) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On appelle *sous-espace affine de E* toute image d'un sous-espace vectoriel de E par une translation, i.e. toute partie $\mathcal{F}$ de E de la forme $\mathcal{F} = x + F = \{f + x\}_{f \in F}$ où F est un sous-espace vectoriel de E et où x est un vecteur de E .

- Le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathcal{F}$ est unique ; on l'appelle la *direction de $\mathcal{F}$* . Les éléments de F sont appelés les *vecteurs directeurs de $\mathcal{F}$* .

Explication

Nous noterons généralement les sous-espaces vectoriels avec des majuscules droites ($F, G, H, \dots$) et les sous-espaces affines avec des majuscules rondes ($\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$). La figure ci-contre illustre autant la définition précédente que le théorème qui suit.



Attention !

Tout sous-espace **vectoriel** F de E est un sous-espace **affine** de E puisque $F = 0_E + F$. Mais la réciproque est fautive car un sous-espace affine en général ne contient pas 0_E .

Démonstration Montrons l'unicité de la direction de $\mathcal{F}$. Soient deux sous-espaces vectoriels F et F' de E et x et x' deux vecteurs de E pour lesquels $\mathcal{F} = x + F = x' + F'$. Nous devons montrer que $F = F'$, mais il suffit par symétrie de prouver l'inclusion $F \subseteq F'$.

Soit $f \in F$. Comme $x = x + 0_E \in x + F = x' + F'$, $x = x' + f'$ pour un certain $f' \in F'$. Or $x + f \in x + F$ également, donc $x + f = x' + \tilde{f}'$ pour un certain $\tilde{f}' \in F'$. Finalement $f = \tilde{f}' - f' \in F'$ comme voulu. ■

Exemple La droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ est un sous-espace affine de direction la droite vectorielle D d'équation $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. La direction s'obtient par simple annulation du second membre constant du système linéaire.

En effet Remarquons que $(1, 1, 1) \in \mathcal{D}$. La preuve suivante consiste simplement à utiliser cette remarque. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{D} &\iff \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (x - 1) + (y - 1) = 0 \\ (x - 1) - (y - 1) + (z - 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff (x - 1, y - 1, z - 1) \in D \iff (x, y, z) \in (1, 1, 1) + D. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathcal{D} = (1, 1, 1) + D$, et donc confirme que $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de direction D .

Exemple Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Fixons $y_0 \in \text{Im } f$. Alors l'ensemble des solutions de l'équation $y_0 = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ est un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } f$.

En effet Puisque $y_0 \in \text{Im } f$, il existe $x_0 \in E$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Alors pour tout $x \in E$:

$$y_0 = f(x) \iff f(x_0) = f(x) \iff f(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \text{Ker } f \iff x \in x_0 + \text{Ker } f.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $y_0 = f(x)$, où $x \in E$, est donc l'espace affine $x_0 + \text{Ker } f$ de direction $\text{Ker } f$.

Théorème (Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et un point) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Deux sous-espaces affines de E sont égaux si et seulement s'ils ont la même direction et un point en commun.

Précisément, si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E de direction F et si A est un point de $\mathcal{F}$ quelconque, alors $\mathcal{F} = A + F$.

Démonstration Montrons que $\mathcal{F} = A + F$. Cela montrera bien que $\mathcal{F}$ est entièrement caractérisé par A et F . Or par définition, $\mathcal{F}$ est un translaté de F (sa direction, unique comme on l'a vu), disons de vecteur x : $\mathcal{F} = x + F$. En particulier, $A = x + \varphi$ pour un certain $\varphi \in F$. Du coup, pour tout $M \in E$:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\iff M \in x + F \iff M - x \in F \iff M - (A - \varphi) \in F \\ &\iff \varphi \in F \iff M - A \in F \iff M \in A + F. \quad \text{Bref : } \mathcal{F} = A + F. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème (Sous-espaces affines et barycentres) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E . Alors $\mathcal{F}$ contient tous les barycentres qu'on peut former à partir de ses points.

Démonstration Soit $((A_k, \lambda_k))_{1 \leq k \leq n}$ une famille de points pondérés de E de poids total Λ non nul et de barycentre associé G . Supposons $A_1, A_2, \dots, A_n$ éléments de $\mathcal{F}$ et montrons que $G \in \mathcal{F}$ également.

Comme $A_1 \in \mathcal{F}$, nous savons que $\mathcal{F} = A_1 + F$, où F désigne la direction de $\mathcal{F}$. Du coup, montrer que $G \in \mathcal{F}$, c'est montrer que $\overrightarrow{A_1 G} = G - A_1 \in F$. Or $\overrightarrow{A_1 G} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{A_1 A_k}$. Comme d'autre part $A_k \in \mathcal{F}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\overrightarrow{A_1 A_k} = A_k - A_1 \in F$ et donc $\overrightarrow{A_1 G} \in F$. ■

Théorème (Intersection de sous-espaces affines) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G .

- (i) Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *concourants* ou *sécants*.
 Dans ce cas, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de E de direction $F \cap G$.
- (ii) Si $E = F + G$, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *concourants*.
 Si plus précisément $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton ; on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *supplémentaires dans E* .

Démonstration

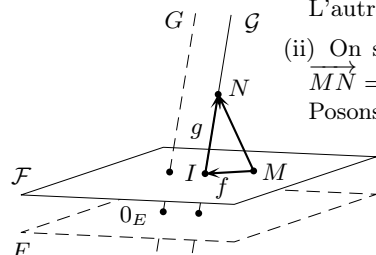
- (i) On suppose $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ concourants. Soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Nous savons que $\mathcal{F} = A + F$ et que $\mathcal{G} = A + G$. Il nous suffit de montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = A + (F \cap G)$.

Soit $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Puisque $\mathcal{F} = A + F$, $M = A + f$ pour un certain $f \in F$; de même $\mathcal{G} = A + G$, donc $M = A + g$ pour un certain $g \in G$. Alors $\overrightarrow{AM} = M - A = f = g \in F \cap G$, et donc $M \in A + (F \cap G)$.

L'autre inclusion $A + (F \cap G) \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est presque une évidence — mais montrez-la tout de même.

- (ii) On suppose que $E = F + G$. Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont non vides, fixons $M \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{G}$. Comme alors $\overrightarrow{MN} = N - M \in E = F + G$, $\overrightarrow{MN} = N - M = f + g$ pour certains $f \in F$ et $g \in G$, donc $M + f = N - g$. Posons $I = M + f = N - g$. Alors $I \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, d'où la concourance de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Si de plus $E = F \oplus G$: $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = I + (F \cap G) = I + \{0_E\} = \{I\}$. ■



Définition (Sous-espaces affines parallèles) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G .

- On dit que $\mathcal{F}$ est *parallèle* à $\mathcal{G}$ si $F \subseteq G$.
- On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *parallèles* si $F = G$. Cette relation se note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$.

××× Attention ! Avec cette définition, dire que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ ne revient pas à dire que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles. Dire que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles ($F = G$), c'est dire que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ ($F \subseteq G$) **ET** que $\mathcal{G}$ est parallèle à $\mathcal{F}$ ($G \subseteq F$).

Une droite affine peut être parallèle à un plan affine puisqu'une droite vectorielle peut être incluse dans un plan vectoriel. Inversement, un plan affine ne peut jamais être parallèle à une droite affine car un plan vectoriel ne peut jamais être inclus dans une droite vectorielle.

Théorème (Parallélisme et intersection) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G .

- (i) Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$, alors soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.
- (ii) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont soit disjoints soit confondus.

Démonstration

- (i) On suppose $\mathcal{F}$ parallèle à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ concourants. Il s'agit de montrer que $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathcal{G}$. Par hypothèse, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ contient au moins un élément A . Par ailleurs $F \subseteq G$ puisque $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$. Forcément : $\mathcal{F} = A + F \subseteq A + G = \mathcal{G}$.

- (ii) est une conséquence immédiate de (i). ■

1.4 APPLICATIONS AFFINES

Définition (Application affine) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est *affine* s'il existe $\vec{f} \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que pour tous $M, N \in E$: $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$.

Si elle existe, une telle application linéaire $\vec{f}$ est unique, appelée la *partie linéaire* de f .

Démonstration Fixons O un point de E . Alors $\vec{f}$ est unique pour la bonne et simple raison qu'on en a une expression explicite en fonction de f : $\vec{f}(u) = \overrightarrow{f(O)f(O+u)}$ pour tout $u \in E$. ■

☺ ☺ ☺ **Explication** Depuis longtemps vous connaissez les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ ($a \in \mathbb{R}$), et vous savez qu'elles sont linéaires ; aujourd'hui vous savez ce qu'est, en général, une application linéaire. De même, vous connaissez depuis longtemps les *fonction affines*, i.e. les fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), somme d'une fonction constante et d'une application linéaire ; la définition précédente n'en est qu'une généralisation.

En effet, si f est affine et si O est un point fixé de E , $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$ pour tout point $M \in E$, i.e. $f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$. L'application f apparaît dans cette relation comme la somme de la fonction constante égale à $f(O)$ et de sa partie linéaire $\vec{f}$. En pratique, c'est ainsi qu'on procèdera pour montrer qu'une application est affine, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \\ (x, y) & \longmapsto \end{cases} \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \\ (x + y + 1, x - y - 1) & \end{cases}$ est affine de partie linéaire $\vec{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \\ (x, y) & \longmapsto \end{cases} \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \\ (x + y, x - y) & \end{cases}$.

En effet Posons $O = (0, 0)$ et notons φ l'application linéaire $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \\ (x, y) & \longmapsto \end{cases} \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \\ (x + y, x - y) & \end{cases}$. Pour tous $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(M) = (x + y + 1, x - y - 1) = (1, -1) + (x + y, x - y) = f(O) + \varphi(x, y) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OM})$. Ceci suffit à prouver que f est affine de partie linéaire φ .

Exemple Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- (i) Toute application linéaire de E dans F est affine, de partie linéaire elle-même.
- (ii) Toute translation de E est affine, de partie linéaire l'identité.

En effet

(i) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors pour tous $M, N \in E$: $\overrightarrow{f(M)f(N)} = f(N) - f(M) = f(N - M) = f(\overrightarrow{MN})$. Ceci montre bien que f est affine et que $\vec{f} = f$.

(ii) Soit $u \in E$. Alors t_u est affine et $\vec{t}_u = \text{Id}_E$ car pour tous $M, N \in E$:

$$\overrightarrow{t_u(M)t_u(N)} = t_u(N) - t_u(M) = (N + u) - (M + u) = N - M = \overrightarrow{MN} = \text{Id}_E(\overrightarrow{MN}).$$

Théorème (Caractérisation des applications affines par leur partie linéaire et l'image d'un point) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, O un point de E et $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow F$ deux applications affines. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f = g$.
- (ii) $\vec{f} = \vec{g}$ et $f(O) = g(O)$.

Démonstration Il nous suffit de montrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

Or pour tout point M de E : $f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = g(O) + \vec{g}(\overrightarrow{OM}) = g(M)$. ■

Théorème (Composition d'applications affines) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications affines. Alors $g \circ f$ est affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

Démonstration Pour tous $M, N \in E$: $\overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = \vec{g}(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{MN}))$. ■

Théorème (Image d'un barycentre par une application affine) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f : E \rightarrow F$ une application affine, $((A_k, \lambda_k))_{1 \leq k \leq n}$ une famille de points pondérés de E de poids total non nul et G le barycentre de cette famille. Alors $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A_1), \lambda_1), (f(A_2), \lambda_2), \dots, (f(A_n), \lambda_n)$.

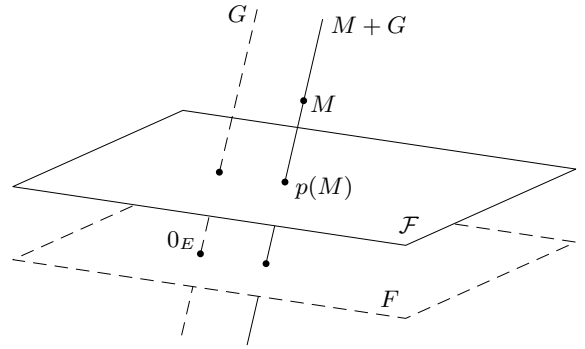
Démonstration
$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{f(G)f(A_k)} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{f}(\overrightarrow{GA_k}) = \vec{f}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GA_k}\right) = \vec{f}(0_E) = 0_F.$$
 ■

1.5 PROJECTIONS ET SYMÉTRIES AFFINES

Définition (Projection affine)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F .

- Pour tout point $M \in E$, l'intersection $\mathcal{F} \cap (M + G)$ est un singleton dont on note $p(M)$ l'unique élément. L'application $p : E \longrightarrow E$ ainsi définie est appelée la *projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G* .
- L'application p est affine et $\vec{p}$ est la projection (vectorielle) sur F parallèlement à G . De plus $p^2 = p$.



Démonstration

- Comme $\mathcal{F}$ et $M + G$ sont deux sous-espaces affines supplémentaires de E , $\mathcal{F} \cap (M + G)$ est un singleton.
- Montrons que p est affine et que $\vec{p}$ n'est autre que la projection (vectorielle) sur F parallèlement à G . Nous noterons $\hat{p}$ cette projection vectorielle. Soient $M, N \in E$. Nous devons prouver que $\overrightarrow{p(M)p(N)} = \hat{p}(\overrightarrow{MN})$.
Puisque $\mathcal{F} \cap (M + G) = \{p(M)\}$ et $\mathcal{F} \cap (N + G) = \{p(N)\}$, et puisque $\mathcal{F} = A + F$ pour $A \in \mathcal{F}$ fixé, il existe $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$ tels que $p(M) = M + g = A + f$ et $p(N) = N + g' = A + f'$. Par soustraction :
 $\overrightarrow{MN} = N - M = (A + f' - g') - (A + f - g) = (f' - f) + (g - g')$, donc par définition de $\hat{p}$: $\hat{p}(\overrightarrow{MN}) = f' - f$.
Finalement, comme voulu : $\overrightarrow{p(M)p(N)} = p(N) - p(M) = (A + f') - (A + f) = f' - f = \hat{p}(\overrightarrow{MN})$.
- Montrons que $p^2 = p$. Soit $M \in E$. Par définition, $p(M) \in \mathcal{F} \cap (M + G)$. En particulier $p(M) + G = M + G$ donc $p(M) \in \mathcal{F} \cap (p(M) + G)$. Or cette relation d'appartenance est la définition même de $p^2(M)$, donc $p^2(M) = p(M)$. ■

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . N'oublions pas que F est aussi un sous-espace affine de E . Dans ces conditions, la projection **affine** p sur F parallèlement à G n'est autre que la projection (**vectorielle**) sur F parallèlement à G .

Théorème (Caractérisation des projections affines) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $p : E \longrightarrow E$ une application.

p est une projection affine si et seulement si p est affine et $p^2 = p$.

Démonstration Nous avons déjà prouvé l'implication directe. Pour la réciproque, supposons que p est affine et que $p^2 = p$. Alors $\vec{p}^2 = \vec{p}$, donc $\vec{p}$ est un projecteur de E , disons la projection sur F parallèlement à G pour certains sous-espaces vectoriels F et G . Fixons alors $O \in E$ et posons $\mathcal{F} = p(O) + F$. Les sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et G sont également supplémentaires dans E . Nous allons prouver que p est la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G .

Soit $M \in E$. Si nous parvenons à montrer que $p(M)$ appartient au $\mathcal{F} \cap (M + G)$ — qui est de toute façon un singleton — nous aurons bien montré que $p(M)$ est le projeté de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G . Or p est affine, donc $p(M) = p(O) + \vec{p}(\overrightarrow{OM}) \in p(O) + F = \mathcal{F}$. D'autre part, $\vec{p}(\overrightarrow{Mp(M)}) = \overrightarrow{p(M)p^2(M)} = \overrightarrow{p(M)p(M)} = 0_E$, toujours parce que p est affine, donc $\overrightarrow{Mp(M)} \in \text{Ker } \vec{p} = G$, i.e. $p(M) \in M + G$. Comme voulu, $p(M) \in \mathcal{F} \cap (M + G)$. ■

Exemple Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 1$ — de direction le plan P d'équation $z = 0$ — et la droite vectorielle D dirigée par $(1, 2, 1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. La projection p sur $\mathcal{P}$ parallèlement à D est l'application $(x, y, z) \mapsto (x + z - 1, y + 2z - 2, 1)$.

En effet Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Par définition, $p(x, y, z)$ est l'unique élément de $\mathcal{P} \cap ((x, y, z) + D)$. Cela veut dire que $p(x, y, z)$ est à la fois de la forme $(a, b, 1)$ et de la forme $(x, y, z) + \lambda(1, 2, 1)$ pour certains $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer. Le système obtenu est celui-ci :
$$\begin{cases} a = x + \lambda \\ b = y + 2\lambda \\ 1 = z + \lambda \end{cases}, \quad \text{qui donne } \lambda = 1 - z \text{ puis } a = x + 1 - z \text{ et } b = y + 2 - 2z, \text{ et finalement comme voulu : } p(x, y, z) = (x + 1 - z, y + 2 - 2z, 1).$$

Pour gagner du temps, nous nous contenterons d'énoncer la définition des symétries affines et les résultats qui les concernent sans justification ni commentaire.

Définition (Symétrie affine) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F .

- Pour tout point $M \in E$, si $p(M)$ est le projeté de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G , on note $s(M)$ l'unique point pour lequel $p(M) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}s(M)$ (milieu). L'application $s : E \rightarrow E$ ainsi définie est appelée la *symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G* .
- L'application s est affine et s^2 est la symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G . De plus $s^2 = \text{Id}_E$.

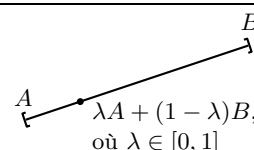
Théorème (Caractérisation des symétries affines) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $s : E \rightarrow E$ une application.
 s est une symétrie affine si et seulement si s est affine et $s^2 = \text{Id}_E$.

1.6 CONVEXITÉ

Définition (Segment) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $A, B \in E$.

On appelle *segment d'extrémités A et B* , noté $[AB]$, l'ensemble : $[AB] = \left\{ \lambda A + (1-\lambda)B \right\}_{\lambda \in [0,1]}$.

En d'autres termes, $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs.

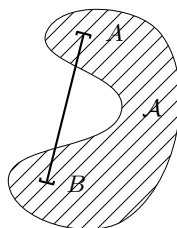


🐞🐞🐞 **Explication** Pourquoi $[AB]$ est-il l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs ? Parce que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + b \neq 0$, le barycentre des points (A, a) et (B, b) est aussi le barycentre des points $\left(A, \frac{a}{a+b}\right) = (A, \lambda)$ et $\left(B, \frac{b}{a+b}\right) = (B, 1-\lambda)$, où $\lambda = \frac{a}{a+b} \in [0, 1]$.

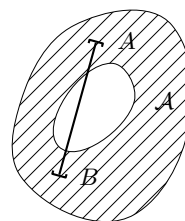
Définition (Convexité) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une partie de E . On dit que $\mathcal{A}$ est *convexe* si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in [0, 1]$: $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{A}$.
 Cela revient à dire que pour tous $A, B \in \mathcal{A}$: $[AB] \subseteq \mathcal{A}$.

🐞🐞🐞 **Explication**

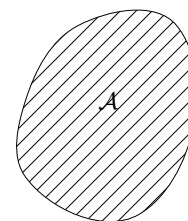
Une partie est donc convexe si elle contient tous les segments qu'on peut former à partir de ses points. Cela revient grosso modo à dire qu'une partie convexe est une partie « suffisamment ronde » : pas de trou, pas de presqu'îles...



Non convexe,
présence de presqu'îles



Non convexe,
présence de trous



Convexe

Exemple Tout sous-espace affine, en tant qu'il contient tous les barycentres de ses points, est en particulier convexe.

Exemple Tout disque du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ est convexe.

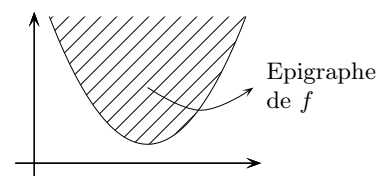
En effet Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Notons $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre a et de rayon r et montrons que $\mathcal{D}$ est convexe — pour le cas des disques ouverts, la preuve est la même mais il faut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

Soient $z, z' \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous devons montrer que $\lambda z + (1-\lambda)z' \in \mathcal{D}$, i.e. que $\left|(\lambda z + (1-\lambda)z') - a\right| \leq r$.

$$\left|(\lambda z + (1-\lambda)z') - a\right| = \left|(\lambda z + (1-\lambda)z') - (\lambda a + (1-\lambda)a)\right| = \left|\lambda(z-a) + (1-\lambda)(z'-a)\right| \leq \lambda|z-a| + (1-\lambda)|z'-a| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

🐞🐞🐞 **Explication** Quel rapport y a-t-il entre la présente notion de « partie convexe » et la notion de « fonction convexe » que nous avons déjà étudiée ?

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. L'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} / f(x) \leq y\}$ est appelé l'*épigraphe* de f : c'est l'ensemble des points du plan situés au-dessus du graphe de f . On dispose alors du résultat suivant : f est convexe si et seulement si son épigraphe l'est.



2 ISOMÉTRIES ET SIMILITUDES

2.1 ISOMÉTRIES

Définition (Isométrie) Soit E un espace euclidien. On appelle *isométrie (affine) de E* toute application $f : E \longrightarrow E$ telle que pour tous $M, N \in E$: $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$ (version points),

i.e. telle que pour tous $x, y \in E$: $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ (version vecteurs).

Exemple Soit E un espace euclidien.

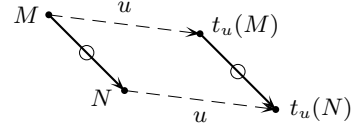
Toute translation de E et toute isométrie vectorielle de E sont des isométries.

En effet Pour les translations, soit $u \in E$. Pour tous $M, N \in E$:

$$\|\overrightarrow{t_u(M)t_u(N)}\| = \|t_u(N) - t_u(M)\| = \|(N + u) - (M + u)\| = \|N - M\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Et si f est une isométrie vectorielle de E , alors f est linéaire et pour tous $x, y \in E$:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \|x - y\|.$$



Théorème (Composition d'isométries) Soient E un espace euclidien et f et g deux isométries de E . Alors $g \circ f$ est aussi une isométrie de E .

Démonstration Pour tous $M, N \in E$: $\|\overrightarrow{g(f(M))g(f(N))}\| = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$. ■

Théorème (Toute isométrie est affine) Soit E un espace euclidien. Les isométries de E sont exactement toutes les applications affines de E dans E dont la partie linéaire est une isométrie vectorielle de E .

☺ ☺ ☺ **Explication** Nous avons vu que les translations et les isométries vectorielles sont des isométries (affines), et que la composition de deux isométries est encore une isométrie. A fortiori, toute composition d'une translation et d'une isométrie vectorielle est une isométrie. Le présent théorème affirme que la réciproque est vraie : toute isométrie est affine, i.e. la composée d'une isométrie vectorielle (sa partie linéaire) et d'une translation.

Démonstration

- Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine dont la partie linéaire est une isométrie vectorielle de E . Alors pour tous $M, N \in E$: $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{f(MN)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$. Et voilà.
- Réciproquement, soit f une isométrie de E . Notons g l'application $f - f(0_E) = t_{-f(0_E)} \circ f$. Alors g est encore une isométrie par composition et pour tous $x, y \in E$, en vertu des identités de polarisation :

$$\begin{aligned} (g(x)|g(y)) &= \frac{1}{2} [\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2] \stackrel{g(0_E)=0_E}{=} \frac{1}{2} [\|g(x) - g(0_E)\|^2 + \|g(y) - g(0_E)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|x - 0_E\|^2 + \|y - 0_E\|^2 - \|x - y\|^2] = \frac{1}{2} [\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2] = (x|y). \end{aligned}$$

Ainsi g préserve les produits scalaires, donc est un automorphisme orthogonal de E . L'écriture $f = f(0_E) + g$ montre comme voulu que f est une application affine de partie linéaire g isométrique. ■

Définition (Déplacement/antidéplacement) Soient E un espace euclidien orienté et f une isométrie de E . On dit que f est un *déplacement de E* si $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle positive de E ; et que f est un *antidéplacement de E* si $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle négative de E .

☺ ☺ ☺ **Explication** Les déplacements sont exactement les isométries qui préservent l'orientation.

Exemple Soit E un espace euclidien orienté. Toute translation de E est un déplacement.

En effet La partie linéaire d'une translation de E est Id_E , isométrie vectorielle positive comme chacun le sait.

2.2 DÉPLACEMENTS EN DIMENSION 2

Théorème (Déplacements et rotations affines en dimension 2) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et f un déplacement de E .

(i) Si f n'a pas de point fixe, alors f est une translation.

(ii) Si f possède un point fixe et $f \neq \text{Id}_E$, alors f possède en fait un et un seul point fixe O appelé son *centre*. Si $\vec{f}$ est la rotation vectorielle de E d'angle de mesure θ , on dit que f est la *rotation de centre O et d'angle de mesure θ* .

En résumé, tout déplacement de E est soit une translation, soit une rotation affine — éventuellement l'identité.

Démonstration Par définition de f , $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle positive, donc une rotation, disons d'angle de mesure θ .

- Supposons $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, i.e. $\vec{f} = \text{Id}_E$. Dans ce cas $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{MN}$ pour tous points M, N de E , donc $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Nf(N)}$. Ceci prouve que la fonction $M \mapsto \overrightarrow{Mf(M)}$ est constante, et donc que f est une translation. En particulier f est sans point fixe — ou bien $f = \text{Id}_E$ si f est la translation de vecteur 0_E .
- Supposons ensuite $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, i.e. $\vec{f} \neq \text{Id}_E$. Parce que $\vec{f}$ est une rotation vectorielle en dimension 2, $\vec{f}$ n'a alors pas d'autre point fixe que 0_E , donc $\vec{f} - \text{Id}_E$ est injectif, a fortiori bijectif. Montrons dans ces conditions que f possède un et un seul point fixe. Un point O étant fixé, alors pour tout point Ω de E :

$$\begin{aligned} f(\Omega) = \Omega &\iff \overrightarrow{f(O)f(\Omega)} = \overrightarrow{f(O)\Omega} &\iff \vec{f}(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{f(O)\Omega} &\iff (\vec{f} - \text{Id}_E)(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{f(O)\Omega} \\ &\xLeftrightarrow[\text{bijectif}]{\vec{f} - \text{Id}_E} \overrightarrow{O\Omega} = (\vec{f} - \text{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{f(O)\Omega}) &\iff \Omega = O + \underbrace{(\vec{f} - \text{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{f(O)\Omega})}_{\text{Existence et unicité!}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3 DÉPLACEMENTS EN DIMENSION 3

Théorème (Rotations affines en dimension 3) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et r un déplacement de E autre que l'identité. Si r possède un point fixe O , alors $\vec{r} \neq \text{Id}_E$, et si $\vec{r}$ est la rotation vectorielle de E d'axe orienté par a et d'angle de mesure θ , l'ensemble des points fixes de r est la droite affine $O + \text{Vect}(a)$. On dit alors que r est la *rotation d'axe $O + \text{Vect}(a)$ orienté par a et d'angle de mesure θ* .

Par convention Id_E est aussi une rotation affixe, dont toute droite est un axe et d'angle de mesure 0 (modulo 2π).

Démonstration Peut-on avoir $\vec{r} = \text{Id}_E$? Si c'est le cas, alors : $r(M) = r(O) + \vec{r}(\overrightarrow{OM}) = O + \overrightarrow{OM} = M$ pour tout point M de E , de sorte que $r = \text{Id}_E$ — contradiction.

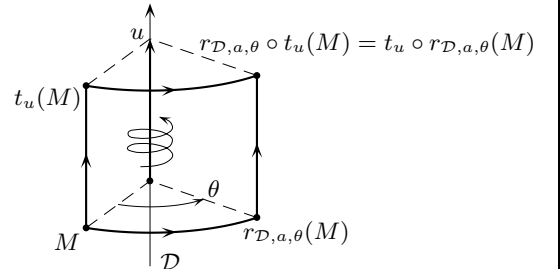
Comme $\vec{r} \neq \text{Id}_E$, $\text{Ker}(\vec{r} - \text{Id}_E) = \text{Vect}(a)$. Alors pour tout point Ω de E , sachant que $\vec{r}(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{r(O)r(\Omega)} = \overrightarrow{Or(\Omega)}$:

$$r(\Omega) = \Omega \iff \vec{r}(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{O\Omega} \iff \overrightarrow{O\Omega} \in \text{Ker}(\vec{r} - \text{Id}_E) \iff \Omega \in O + \text{Vect}(a).$$

Cela montre bien que l'ensemble des points fixes de r est $O + \text{Vect}(a)$. ■

Définition (Vissage)

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{D}$ une droite affine de E , a un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}$, u un vecteur directeur quelconque de $\mathcal{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *vissage de vecteur u , d'axe $\mathcal{D}$ orienté par a et d'angle de mesure θ* la composée commutative $r_{\mathcal{D},a,\theta} \circ t_u = t_u \circ r_{\mathcal{D},a,\theta}$ de la rotation $r_{\mathcal{D},a,\theta}$ d'axe $\mathcal{D}$ orienté par a et d'angle de mesure θ et de la translation t_u de vecteur u .



Explication

- Devise des visages : « On tourne et on avance », ou bien : « On avance et on tourne » puisque $r_{\mathcal{D},a,\theta}$ et t_u commutent.
- Toute translation est un vissage (pour $\theta = 0$) et toute rotation affine également (pour $u = 0_E$).

Démonstration Comme $\vec{r}_{\mathcal{D},a,\theta}(a) = a$, a et u étant colinéaires, $\vec{r}_{\mathcal{D},a,\theta}(u) = u$. Du coup $r_{\mathcal{D},a,\theta} \circ t_u = t_u \circ r_{\mathcal{D},a,\theta}$ car : $\forall M \in E, \quad r_{\mathcal{D},a,\theta} \circ t_u(M) = r_{\mathcal{D},a,\theta}(M + u) = r_{\mathcal{D},a,\theta}(M) + \vec{r}_{\mathcal{D},a,\theta}(u) = r_{\mathcal{D},a,\theta}(M) + u = t_u \circ r_{\mathcal{D},a,\theta}(M)$. ■

Théorème (Déplacements en dimension 3) Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Tout déplacement de E est un vissage.

Démonstration Soit f un déplacement de E . Notons F l'ensemble des points fixes de $\vec{f}$.

- Comme $\vec{f}$ stabilise F et est un automorphisme orthogonal, $\vec{f}$ stabilise aussi $F^\perp$. L'identité fixant tout vecteur, $F^\perp$ est donc stable par $(\vec{f} - \text{Id}_E)$, de sorte que $(\vec{f} - \text{Id}_E)|_{F^\perp}$ est un endomorphisme de $F^\perp$. Calculons son noyau : $\text{Ker} (\vec{f} - \text{Id}_E)|_{F^\perp} = F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Ainsi $(\vec{f} - \text{Id}_E)|_{F^\perp}$ est injective, donc ici bijective.
- Fixons O un point de E quelconque. Comme $E = F \oplus F^\perp$, $\overrightarrow{Of(O)} = u + v$ pour certains $u \in F$ et $v \in F^\perp$. L'application $(\vec{f} - \text{Id}_E)|_{F^\perp}$ étant bijective d'après le point précédent, $v = (\vec{f} - \text{Id}_E)|_{F^\perp}(w)$ pour un certain $w \in F^\perp$. Posons alors $\Omega = O - w$ et montrons que $\overrightarrow{\Omega f(\Omega)} = u \in F$.

$$\overrightarrow{\Omega f(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(\Omega)} = w + (u + v) + \vec{f}(\overrightarrow{O\Omega}) = (u + v) - (\vec{f} - \text{Id}_E)(w) = (u + v) - v = u.$$

- Notons r l'application $M \mapsto \Omega + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M})$ définie sur E . Alors r est affine de partie linéaire $\vec{f}$ et fixe Ω , donc est une rotation affine d'axe $\Omega + F$ dirigé par u — puisque $u \in F$. Par ailleurs, pour tout point M de E :

$$f(M) = f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M}) = (\Omega + u) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M}) = t_u(\Omega + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M})) = t_u \circ r(M).$$

Ainsi $f = t_u \circ r$. Or r est une rotation affine d'axe **dirigé par u** , donc f est un vissage comme voulu. ■

2.4 SIMILITUDES

Définition (Homothétie affine de rapport positif) Soient E un espace euclidien orienté, O un point de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $\begin{cases} E & \longrightarrow E \\ M & \longmapsto O + \lambda \overrightarrow{OM} \end{cases}$ est appelée l'*homothétie (affine) de E de centre O et de rapport λ* . C'est une application affine et $\vec{h} = \lambda \text{Id}_E$.

Définition (Similitude vectorielle/affine, directe/indirecte) Soient E un espace euclidien orienté et $\lambda > 0$.

- On appelle *similitude (vectorielle) de E de rapport λ* toute application $s : E \longrightarrow E$ telle que pour tous $x, y \in E$: $(s(x)|s(y)) = \lambda^2(x|y)$, i.e. toute application linéaire $s : E \longrightarrow E$ telle que pour tous $x \in E$: $\|s(x)\| = \lambda\|x\|$.

Cela revient à dire que s est la composée de l'homothétie de E de rapport λ et d'un automorphisme orthogonal de E . Si cet automorphisme orthogonal est positif, on dit que s est *directe*; s'il est négatif, que s est *indirecte*.

- On appelle *similitude (affine) de E de rapport λ* toute application $s : E \longrightarrow E$ telle que pour tous points M, N de E : $\|\overrightarrow{s(M)s(N)}\| = \lambda\|\overrightarrow{MN}\|$.

Cette définition implique que s est affine et revient à dire que $\vec{s}$ est une similitude vectorielle de E . Si $\vec{s}$ est directe, on dit que s est *directe*; si $\vec{s}$ est indirecte, que s est *indirecte*.

☺ ☺ ☺ **Explication** En bref, une similitude est une application qui préserve les rapports de distances, et une similitude directe est une similitude qui préserve l'orientation.

Exemple Soit E un espace euclidien orienté. Toute translation de E et toute rotation affine de E est une similitude directe de rapport 1. Toute homothétie **de rapport strictement positif** est une similitude directe.

Théorème (Similitudes directes en dimension 2)

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et s une similitude directe de E de rapport λ , dont la partie linéaire $\vec{s}$ est la composée de l'homothétie de rapport λ et de la rotation vectorielle d'angle de mesure θ . Si s n'est pas une translation, alors s possède un unique point fixe O . On dit alors que s est la *similitude directe de E de rapport λ , de centre O et d'angle de mesure θ* .

